
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

МОДЕЛЬ СТАДНОГО ПОВЕДЕНИЯ КЛИЕНТОВ БАНКА*

© 2013 г. М.М. Вороновицкий

(Москва)

Требования большинства клиентов банка о досрочном возврате вкладов называют нападением на банк. Одной из существенных причин этого явления оказывается возникновение стадного поведения клиентов банка. В настоящей работе нападение на банк рассматривается как один из примеров стадного поведения. Построены и исследованы две динамические модели взаимодействия коллектива клиентов и банка. Показано, что при простых и достаточно естественных предположениях о механизме выбора решений клиентами возникает стадное поведение. Главная цель работы – исследование механизмов стадного поведения более сложных, чем исследованные ранее.

Ключевые слова: стадное поведение, набег на банк, математические модели, цепи Маркова.

ВВЕДЕНИЕ

Обращение большого числа вкладчиков к банку с требованием вернуть их депозиты часто вызвано страхом столкнуться с неплатежеспособностью банка. Порожденное этим стремление изъять средства из банка называют набегом на банк (*bank run*, *run on a bank*). Поскольку кассовый резерв банка, предназначенный для обслуживания клиентов, невелик по сравнению с суммой вкладов, массовый наплыв легко может привести к приостановлению выдачи банком денежных средств. Такое явление наблюдается в случаях, когда клиенты впадают в панику под влиянием слухов и спешат закрыть свои счета в банке. Одно из объяснений распространения паники состоит в том, что в процессе принятия решений массой клиентов банка возникает явление стадного поведения.

В литературе есть две основные точки зрения на то, как запускаются нападения на банк. Одна точка зрения указывает, что подобные нападения являются естественными последствиями бизнес-цикла и они повторяются. В частности, много эмпирических данных говорит в пользу того, что банковские кризисы в США в последней четверти XIX и в начале XX в. – фактические следствия делового цикла. Другая точка зрения состоит в том, что нападение на банк – это самостоятельное явление, порожденное неожиданностью (как это показано в пионерской работе (Diamond, Dybvig, 1983)).

Исследования набегов на банк проводятся для уточнения формулировок пунктов соглашения между вкладчиком и банком об условиях хранения вклада в банке (контракта депозита), которые обеспечивают эффективную работу банка и предотвращают опасные последствия набегов на банк. Для этого исследуются модели равновесия в системе “банк – клиенты” и оцениваются варианты контрактов между клиентом и банком, а также способы поддержки банков со стороны центрального банка страны в случае набега на банк.

В работе (Diamond, Dybvig, 1983) рассматривается модель, известная как DD-модель, которая упрощенно описывает взаимодействие банка с его клиентами. В этой работе процесс взаимодействия банка и его клиентов рассматривается в три момента (такта) времени. Предполагается континуум клиентов банка; все клиенты делают вклады в момент 0, а в момент 1 вкладчики имеют возможность забрать в соответствии с контрактом часть или полную сумму вложенных в

* Работа выполнена в Институте проблем рынка РАН при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-06-00500).

момент 0 средств. В момент 2 клиенты, у которых остались средства на депозите, получают на каждую оставшуюся единицу средств R единиц ($R \geq 1$).

Для нормировки предполагается, что в момент 0 все клиенты вместе вкладывают единицу средств. В момент 1 вкладчики разделятся на два типа: предпочитающие получать обратно вложенные ими средства (потреблять) в момент 1 (*ранние клиенты* банка) и предпочитающие получать обратно свои средства (потреблять) в момент 2 (*поздние клиенты* банка). Эти два типа отличаются своими функциями полезности, т.е. функциями, зависящими от величин средств, полученных из банка клиентом данного типа. Таким образом, фактически рассматривается система с двумя потребителями с различными функциями полезности как бы разного веса. Существенным элементом модели служит механизм распределения средств между клиентами. Предполагается, что согласно заключенному контракту депозита в момент 1 каждый затребовавший обратно свои средства клиент получает r_1 единиц средств на каждую запрашиваемую им единицу (здесь и ниже эта величина является одной из важных характеристик контракта, регулирующих, в частности, возможности нападения на банк). Но у банка может не хватить для этого средств, поэтому предположим, что в момент 1 клиенты обращаются в банк в порядке случайной очереди и первые клиенты получают r_1 , а те, для кого не остается средств, не получают ничего. Если же в момент 1 у банка еще остались средства, то в момент 2 их становится в R раз больше, и они делятся между клиентами (еще не получившими все вложенные в момент 0 средства) поровну.

Авторы (Diamond, Dybvig, 1983) рассматривают задачу максимизации ожидаемой полезности клиентов и показывают, что при $r_1 > 1$ набег на банк является одним из двух равновесных состояний модели, а при $r_1 = 1$ равновесие, включающее набег на банк, будет отсутствовать. Таким образом, в модели, учитывающей возможность депозитов до востребования с фиксированной величиной r_1 и механизм распределения в момент 1, существует равновесие интересов клиентов, одни из которых предпочитают получать обратно свои средства в момент 1, другие предпочитают получать обратно свои средства в момент 2. Но при этом имеется нежелательное равновесие – набег на банк. Как отмечают Д. Даймонд и Ф. Дибвиг, из модели следует, что из-за отзыва кредита и прекращения долгосрочных инвестиций нападению может подвергнуться и здоровый банк.

Более сложная, но лучше отражающая реальную ситуацию модель рассматривалась Ф. Алленом и Д. Гейлом (Allen, Gale, 1998, 2000, 2000a, 2000b). Эта модель, известная как AG-модель, является обобщением модели Даймонда–Дибвига, причем авторы рассматривают клиентов банка в качестве обобщенных потребителей. В ней время также предполагается состоящим из трех тактов. Имеется два типа активов – безопасные и рискованные, а также некий потребительский товар. Безопасные активы можно представлять как технологию хранения, которая преобразует единицу потребительского товара на такте t в единицу потребительского товара на такте $t + 1$. Рискованные активы моделируются стохастической производственной технологией, которая преобразует единицу потребительского товара на такте 0 в R единиц потребительского товара на такте 2, где R – неотрицательная, случайная величина с плотностью распределения $f(R)$. В момент 1 вкладчики могут наблюдать сигнал, который мыслится как ведущий экономический индикатор. Наличие сигнала предсказывает, что потребители будут поздними (т.е. потребление произойдет на втором такте). В нулевой момент потребители знают вероятность быть ранним (и, следовательно, известна вероятность быть поздним), но каждый из них не знает, к какой группе он реально принадлежит (для простоты предполагается, что эта вероятность равна половине). Только на такте 1 каждый потребитель узнает то, каким он является, и тем самым определяется значение его функции полезности, точнее, ее аргумент – потребление в момент 1 или потребление в момент 2. Тогда типичная полезность потребителя может быть записана в виде

$$U = \begin{cases} u(c_1) & \text{с вероятностью } 1/2; \\ u(c_2) & \text{с вероятностью } 1/2, \end{cases}$$

где c_t – потребление на такте t . Функция u дважды непрерывно дифференцируема и строго вогнута. Тип потребителей не наблюдаем, поэтому поздний потребитель всегда может вести себя как ранний. Общее количество денег в банке (включая те, которые в момент 0 внесли клиенты)

равно E . Банк вкладывает X единиц в рискованные активы и L единиц в безопасные, так что в момент 2 количество денег в банке равно $L + RX$.

В отличие от работы (Diamond, Dybvig, 1983) в AG -модели в случае недостатка средств для выплат клиентам на втором такте предполагается пропорциональное разделение имеющихся у банка ликвидных активов между всеми обратившимися клиентами.

В AG -модели исследуется задача максимизации ожидаемой полезности потребителя при естественных ограничениях, в частности ограничениях, связанных с размерами средств банка, вложенных в безопасные и рискованные активы (X, L). Показано, что при определенных соотношениях X и L нападение на банк будет одним из двух равновесий, причем второе равновесие не является нападением на банк (на такте 1 никто из поздних потребителей не требует возврата своих средств). Также в модели исследуются различные проблемы разделения риска, соответствующие различным предположениям об информационной и регулирующей среде. В модели Аллена–Гейла (Allen, Gale, 1998) в набеге на банк могут участвовать и не все поздние потребители, тогда как в модели Даймонда–Дибвига в набеге участвуют все потребители. Кроме этого в работе показано, что внешнее воздействие на банк, направленное на устранение нападения на банк, приводит к уменьшению ожидаемой величины функции полезности клиентов банка. Стоит заметить, что во всех рассмотренных выше работах предполагался рациональный выбор клиентов банка – ориентация на оптимальное значение своей функции полезности.

В работе Т. Йорулмазер (Yorulmazer, 2003) сформулирована динамическая модель системы “банк – клиенты”, учитывающая реакцию клиентов на поступающую к ним информацию о состоянии банка и выборе остальных клиентов в предшествующий момент. Автор опирается на результаты работы (Bikhandany, Hirsheifer, Welch, 1992), в которой исследуется стадное поведение последовательно принимающих решения участников. В этой модели каждый участник получает сигнал о том, какое решение является наилучшим. Этот сигнал оказывается правильным только с некоторой вероятностью. Кроме того, каждый участник знает о решениях, принятых его предшественниками в очереди. В этой работе при указанных условиях показана возможность существования особого случая стадного поведения – каскада, когда, начиная с некоторого места в очереди, все участники принимают одно и то же решение, не учитывая свою собственную информацию. В случае когда участники выбирают одно из двух возможных решений, возможны два вида каскадов: 1) *положительный* – все выбирают решение с наибольшей полезностью; 2) *отрицательный* – все выбирают худшее решение. При этом существенным недостатком этого подхода оказывается предположение о том, что клиенты банка действуют последовательно – в порядке некоторой очереди, как это принято в моделях каскадов.

Скорее всего, поведение вкладчиков характеризуется адаптацией, что нельзя отразить с помощью приведенных выше моделей. Вкладчик обязательно учитывает результаты своих предыдущих взаимодействий с банком и наблюдаемые им действия других вкладчиков. Поэтому изменение первоначального решения возрастающим числом поздних вкладчиков можно рассматривать как стадное поведение, когда информация о выборе других участников является основным фактором выбора решения, а собственная информация игнорируется. Наиболее значительный и известный подход к описанию механизмов стадного поведения дается в работе (Bikhandany, Hirsheifer, Welch, 1992), а также в не менее известной работе (Banerjee, 1992). Но в этих работах предполагается последовательное принятие решений агентами, что не совсем соответствует реальному порядку принятия решений клиентами банка. В работах (Вороновицкий, Мейтал, 2003; Вороновицкий, 2009) исследуется случай одновременного принятия решений всеми участниками коллектива и для описания динамики процесса применен аппарат цепей Маркова.

Предложения по улучшению банковских механизмов или рекомендации по усовершенствованию поведения банка, с тем чтобы не допустить набега на банк, не являются целью предлагаемой работы. Цель работы – дать простое описание механизма поведения клиентов банка и показать возможность возникновения стадного поведения среди клиентов банка.

В моделях Даймонда–Дибвига и Аллена–Гейла (Diamond, Dybvig, 1983; Allen, Gale, 1998) клиент банка принимает по крайней мере три решения. Первое до начала нулевого такта – вкладывать или не вкладывать деньги в банк. В случае решения вложить деньги, принятого на нулевом такте, он на этом же нулевом такте выбирает между двумя решениями: вкладывать средства

на один такт или на два такта. Если он вложил средства на два такта, то на первом такте он решает вопрос: забрать средства на этом такте или оставить их до такта 2. Желание упростить модель вынуждает нас не рассматривать решение клиента, принятое до нулевого такта, и предположить, что все агенты являются клиентами банка, т.е. вкладывают средства только в этот банк. Можно считать, что клиент, недовольный предлагаемыми банком условиями, вкладывает свои средства в безопасный актив (на один такт). Мы будем исследовать динамическую модель, когда ситуация, похожая на описанную выше, многократно повторяется.

В разд. 1 и 2 приведены простые модели взаимодействия коллектива клиентов с банком. В основу наших моделей положена схема, предложенная в (Diamond, Dybvig, 1983), в которой рассматриваются три такта времени ($t = 0, 1, 2$). На нулевом такте клиентами выбирается направление вложения средств – долгосрочные или краткосрочные депозиты. На первом такте клиенты, сделавшие долгосрочные вложения, решают забрать или оставить свои средства, а клиенты, сделавшие на предыдущем такте краткосрочные вложения, получают свои деньги плюс установленный процент. На втором такте клиентам, сделавшим за два такта до этого долгосрочные вложения, банк возвращает их деньги плюс установленный процент. В отличие от модели Даймонда–Дибвига (Diamond, Dybvig, 1983), посредством наших моделей мы изучаем процесс, происходящий в течение очень длительного периода (теоретически бесконечного), причем время предполагается дискретным и выбор клиентов повторяется при повторении тактов. При этом установлено, что если варианты решений выбираются с постоянными вероятностями, зависящими от величин процентов, то в результате последовательных выборов не возникает стадного поведения (т.е. с ростом времени клиенты не начинают вести себя одинаково), а когда вероятности двух выборов зависят от решения клиентов в предшествующий момент времени, доказано, что с ростом времени поведение клиентов банка становится одинаковым и не меняется в дальнейшем. Важно отметить, что этот факт имеет место при определенном виде зависимости вероятностей от поведения клиентов в предыдущий момент.

В разд. 1 построена простая модель, не учитывающая рост средств у клиентов банка и динамику средств банка. Но сложность описания и моделирования динамики этих процессов взаимодействия коллектива вкладчиков и банка делает даже крайне упрощенные модели полезными для дальнейших исследований. Переменными этой модели являются число клиентов банка, принимающих одно из бинарных решений о вложении на долгосрочные или краткосрочные депозиты, и число клиентов, принимающих одно из бинарных решений забрать или не забирать свои средства. Рассматриваются два варианта модели. В первом варианте вероятность клиентов выбрать долгосрочные вложения и вероятность отказаться от долгосрочных вложений постоянны. В такой модели стадное поведение не возникает. Во втором варианте модели вероятность выбора направления вложений зависит от отношения числа клиентов, выбравших долгосрочные вложения, к общему числу клиентов, принимающих решение в предыдущий момент времени. Вероятность выбора забрать средства с долгосрочных депозитов или оставить их на депозитах зависит от отношения числа клиентов, забравших средства, к суммарному числу клиентов, имеющих средства на долгосрочных депозитах в предыдущий момент времени. Как показано в данном разделе, в случае определенного вида зависимостей вероятностей от этих отношений, удовлетворяющих некоторым условиям, с течением времени возникает стадное поведение.

В разд. 2 построена достаточно простая модель, учитывающая рост средств у клиентов банка, но игнорирующая динамику средств банка и, как кажется, лучше отражающая сущность рассматриваемых процессов. Переменными этой модели являются величины средств у каждого из клиентов банка, принимающих одно из бинарных решений о вложении на долгосрочные или краткосрочные депозиты, и величины средств, вкладываемых клиентами банка на долгосрочные или краткосрочные депозиты и забираемых клиентами банка с долгосрочных депозитов. В этой модели вероятность выбора направления вложений зависит от отношения суммарного количества средств, направленных клиентами банка на долгосрочные вложения, к общему количеству средств у клиентов, принимающих решение в предыдущий момент времени. Вероятность выбора забрать средства с долгосрочных депозитов или оставить их на этих депозитах зависит от отношения количества средств, которые клиенты, сделавшие долгосрочные вложения, забирают назад, к суммарному количеству средств у клиентов, имеющих средства на долгосрочных депозитах.

зитах в предыдущий момент времени. В работе показано, что в случае определенного вида зависимостей вероятностей от этих отношений с течением времени возникает стадное поведение.

В этих моделях не рассматриваются динамика средств банка (X и L в модели Аллена–Гейла (Allen, Gale, 1998)) и взаимодействие банка с коллективом клиентов (изменение τ , ρ , R_1 , R_2 , q в зависимости от поведения коллектива клиентов). Понимая важность учета взаимодействия банка и его клиентов, мы рассчитываем сделать это в дальнейших исследованиях.

В заключении обсуждаются возможности дальнейшего исследования стадного поведения и в общем виде формулируются некоторые проблемы, решение которых необходимо для продвижения этих исследований, а также значение полученных результатов для дальнейшего изучения стадного поведения участников финансовых рынков.

1. МОДЕЛЬ, УЧИТЫВАЮЩАЯ ТОЛЬКО ЧИСЛО КЛИЕНТОВ БАНКА РАЗНЫХ КАТЕГОРИЙ

Рассмотрим полезную для понимания динамики процесса модель, переменные которой являются целочисленными величинами и представляют собой количество клиентов банка, принявших в данный момент то или иное решение. В этой модели количество денег, которое есть у клиента банка в данный момент времени или вложено им на краткосрочный или долгосрочный период, не влияет на его решение.

Мы ограничим нашу модель ситуацией, когда банк принимает от клиентов вклады на срок в один или два стандартных периода. В нулевой момент каждый из N клиентов банка выбирает вариант вложений своих средств: краткосрочное (на один такт) или долгосрочное (на два такта). В первый момент времени краткосрочные вкладчики получают $1 + \rho$ единиц средств за каждую единицу краткосрочных вложений, а долгосрочные вкладчики на втором такте – $1 + R_1$ с вероятностью q и $1 + R_2$ единиц на каждую единицу долгосрочных вложений с вероятностью $1 - q$. Время предполагается дискретным $t = 1, 2, \dots$ и в каждый момент времени все вкладчики принимают различные решения, куда вложить средства на краткосрочный или долгосрочный депозит. В следующий момент времени вложившие свои средства на долгосрочный депозит могут принять решение забрать свои средства, вложенные на долгосрочный депозит в предыдущий момент. При этом они получают $1 + \rho$ на каждую единицу вклада. Естественно полагать, что $R_2 < \tau < \rho < R_1$. Эта модель отражает основы подхода моделей Даймонда–Дибвига и Аллена–Гейла.

Будем рассматривать поведение клиентов в моменты $t = 1, 2, \dots$. Процесс можно представить следующим образом.

Будем считать его состоящим из двух элементарных тактов. На первом такте (в момент t) клиент банка, вложивший деньги на два такта в момент $t - 1$, может затребовать эти деньги досрочно. В этом случае он получит сумму, равную умноженному на $1 + \tau$ количеству денег, вложенных им на два такта. Также на первом такте (в момент t) клиенту, который вложил деньги на один такт, банк возвращает деньги, увеличенные на коэффициент $1 + \rho$. Кроме того, каждому клиенту банка, вложившему деньги на два такта, на втором такте возвращается сумма, равная умноженной на $(1 + R)^2$ разности между суммой, вложенной им на два такта в момент $t - 2$, и частью этой суммы, изъятой им в момент $t - 1$. Можно считать, что $R = R_1$ с вероятностью q , и $R = R_2$ с вероятностью $1 - q$. На втором такте (в момент $t + 2$) клиент банка принимает решения, на какие вложения – долгосрочные или краткосрочные – направить имеющиеся у него деньги. Будем также предполагать, что все решения о вложениях или изъятии денег клиентом относятся ко всей сумме, имеющейся у клиента или положенной клиентом на долгосрочный депозит. Иначе говоря, клиент банка не может положить на депозит часть имеющихся у него денег или снять с депозита часть имеющихся там денег.

Обозначим через $n(t)$ число клиентов, делающих в момент t выбор между краткосрочными и долгосрочными вложениями, т.е. имеющих свободные средства в момент t . Пусть $m(t)$ клиентов делают долгосрочные вложения, а $n(t) - m(t)$ – краткосрочные. Обозначим через $l(t + 1)$ число клиентов из $m(t)$ клиентов, отказавшихся в момент $t + 1$ от долгосрочных вложений и вернувших свои средства из банка. Поскольку в модели предполагается, что клиенты могут хранить свои средства только в этом банке, эти клиенты добавятся к $n(t + 1)$ клиентам, делающим выбор меж-

ду краткосрочными и долгосрочными вложениями в момент $t + 1$. Так как всего клиентов N , то имеет место балансовое равенство

$$n(t) + m(t - 1) - l(t) = N. \quad (1)$$

Обозначим через $r_t(n, m, l)$ вероятность события, что в момент t делают выбор n клиентов, и из этих n клиентов m выбирают долгосрочные вложения в момент t , а из этих m клиентов в момент $t + 1$ находится l клиентов, которые решают получить свои деньги обратно.

Обозначим через $r_t(n)$ вероятность того, что в момент t имеется n клиентов банка, делающих выбор:

$$r_t(n) = \sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^N r_t(n, m, l), \quad \sum_{n=0}^N r_t(n) = 1. \quad (2)$$

Рассмотрим случай рандомизированного и независимого принятия решений клиентами при одних и тех же вероятностях решений во все моменты времени. Предположим, что $P_2 = P_2(R_1, R_2, q, \rho)$ – вероятность для клиента поместить свои средства на долгосрочный депозит (соответственно $1 - P_2$ вероятность, что клиент поместит свои средства на краткосрочный депозит). Пусть $P_1 = P_1(R_1, R_2, q, \tau)$ – вероятность того, что клиент, поместивший свои средства на долгосрочный депозит в момент $t - 1$, решит получить свои средства назад в промежуточный момент времени t . Тогда вероятность того, что при этом m клиентов в момент t выбрали долгосрочные вложения, равна

$$\frac{P_2^m (1 - P_2)^{n-m} n!}{m!(n-m)!} r_t(n), \quad (3)$$

а вероятность того, что при этом l клиентов решили в момент $t + 1$ изъять свои долгосрочные вложения, –

$$\frac{P_1^l (1 - P_1)^{m-l} m!}{l!(m-l)!} \frac{P_2^m (1 - P_2)^{n-m} n!}{m!(n-m)!} r_t(n).$$

Выделим три типа распределений:

- 1) $r(n, n, 0) = 1$, $r(n, m, l) = 0$ при $0 < l \leq m < n$ или $m = n$, $l > 0$;
- 2) $r(n, n, n) = 1$, $r(n, m, l) = 0$ при $n > l \geq 1$ или $n = m \geq l$;
- 3) $r(n, 0, 0) = 1$, $r(n, m, l) = 0$ при $0 < l \leq m < n$ или $m = n$, $l > 0$.

Эти три стационарных распределения соответствуют трем типам стадного поведения. Первое из них относится к стадному поведению, когда все клиенты банка всегда предпочитают долгосрочные вложения и никогда от них не отказываются. Второе распределение отвечает несколько странному (но вполне возможному) стадному поведению, когда все клиенты банка всегда предпочитают долгосрочные вложения, но отказываются от своего решения в следующий момент времени. Третье распределение соответствует стадному поведению, когда все клиенты банка всегда предпочитают краткосрочные вложения (можно считать, что они практически отказываются от услуг банка).

Обозначим для удобства: $n(t)$ через ν , $m(t)$ через μ , $l(t)$ через λ . Тогда можно записать, учитывая балансовое равенство $N = n + \mu - \lambda$, однородную цепь Маркова со следующими вероятностями состояний:

$$r_{t+1}(n, m, l) = \frac{m!}{l!(m-l)!} \frac{n!}{m!(n-m)!} \times \\ \times \sum_{\nu=0}^N \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} P_1^l (1 - P_1)^{m-l} P_2^m (1 - P_2)^{n-m} \delta_{\lambda, N-n-\mu} r(\nu, \mu, \lambda),$$

или

$$r_{t+1}(n, m, l) = \frac{n!}{(n-m)!l!(m-l)!} \times \sum_{\nu=N-n}^N \sum_{\mu=N-n}^{\nu} P_1^l (1-P_1)^{m-l} P_2^m (1-P_2)^{n-l} r(\nu, \mu, n+\mu-N). \quad (4)$$

Можно показать, что при $1 > P_1 > 0$, $1 > P_2 > 0$ эта цепь Маркова является эргодической и со стационарным распределением вида

$$r^{(0)}(n) = \frac{N!((1-P_2)P_1)^{N-n}}{(N-n)!n!(1+P_1-P_1P_2)^N},$$

$$r^{(0)}(n, m, l) = \left\{ \frac{[(1-P_2)P_1]^{N-n} N!}{[(N-n)!n!]} \right\} \left\{ \frac{P_1^l (1-P_1)^{m-l} m!}{l!(m-l)!} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{P_2^m (1-P_2)^{n-m} n!}{m!(n-m)!} \right\} \frac{1}{(1+P_1-P_1P_2)^N}. \quad (5)$$

Из формулы (5) видно, что стационарное распределение $r^{(0)}(n, m, l)$ не соответствует ни одному типу стадного поведения.

В случае $P_2 = P_2(R_1, R_2, q, \rho) = 0$ клиент будет выбирать только краткосрочные вложения, т.е. $m(t) = 0$ для любого t (естественно, в этом случае величина P_1 не играет никакой роли). Здесь мы имеем $n(t+1) = n(t) = N$ для всех t , т.е. все клиенты банка делают вложения только на один такт.

Если $P_2 = P_2(R_1, R_2, q, \rho) = 1$, то $m(t) = n(t)$ для всех t . При этом возможны два случая. Если $P_1 = P_1(R_1, R_2, q, \tau) = 0$, то $m(t) = n(t) = m(t+1) = n(t+1) = N$ для всех t , т.е. все клиенты делают только долгосрочные вложения и держат их в банке весь оговоренный срок. Если $P_1 = P_1(R_1, R_2, q, \rho) = 1$, то $m(t) = n(t) = l(t) = N$ для всех t , т.е. все клиенты в каждый момент вкладывают деньги на два такта, но после первого такта забирают их.

В этих случаях цепь Маркова не будет эргодической, но у нее будут по крайней мере три стационарных распределения:

- 1) $r(n, n, 0) = 1$, $r(n, m, l) = 0$ при $0 < l \leq m < n$ или $m = n$, $l > 0$;
- 2) $r(n, n, n) = 1$, $r(n, m, l) = 0$ при $n > m \geq 1$ или $n = m \geq l$;
- 3) $r(n, 0, 0) = 1$, $r(n, m, l) = 0$ при $0 < l \leq m < n$ или $m = n > 0$, $l \geq 0$.

Это те распределения, которые соответствуют трем типам стадного поведения.

Теперь рассмотрим простой случай, когда возможно стадное поведение. Для простоты будем предполагать функции $P_2(t) = P_2(R_1, R_2, q, \rho, m(t-1)/n(t-1))$ и $P_1(t) = P_1(R_1, R_2, q, \tau, l(t)/m(t-1))$ такими, что

$$P_2(t) = P_2(R_1, R_2, q, \rho, 0) = 0, \quad P_2(t) = P_2(R_1, R_2, q, \rho, 1) = 1,$$

$$P_1(t) = P_1(R_1, R_2, q, \tau, 0) = 0, \quad P_1(t) = P_1(R_1, R_2, q, \tau, 1) = 0.$$

Эти четыре условия означают, что в случае, когда в предыдущий момент выбор всех клиентов банка одинаков, то в следующий момент выбор всех клиентов такой же с вероятностью 1 и, следовательно, также одинаков. Предположим, что $P_2(R_1, R_2, q, \rho, \alpha)$, $P_1(R_1, R_2, q, \tau, \alpha)$ – непрерывные функции α для $0 \leq \alpha \leq 1$ и при этом

$$1 > \frac{dP_2(R_1, R_2, q, \rho, \alpha)}{d\alpha} > 0, \quad 1 > \frac{dP_1(R_1, R_2, q, \tau, \alpha)}{d\alpha} > 0,$$

$$1 > P_2(R_1, R_2, q, \rho, \alpha) > 0, \quad 1 > P_1(R_1, R_2, q, \tau, \alpha) > 0,$$

если $0 < \alpha < 1$. Условимся, что при $m(t-1) = 0$ имеем $P_1(R_1, R_2, q, \tau, l(t)/m(t-1)) = 1$. Заметим также, что $n(t)$, $l(t)$ связаны с $m(t-1)$ соотношением (1).

Утверждение 1. Если $t \rightarrow \infty$, то

$$\sum_{k=0}^N r_i(k, 0, 0) \rightarrow r_0, \quad r_i(N, N, N) \rightarrow r_i, \quad \sum_{k=0}^N r_i(k, 0, 0) \rightarrow r_2, \quad r_0 + r_1 + r_2 = 1.$$

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

Важную роль играет вопрос о скорости сходимости. Но, к сожалению, скорость сходимости не удалось оценить аналитически. Были выполнены многочисленные расчеты с моделью, описанной формулой (4), для двух видов зависимостей P_2 от переменной $m(t-1)/n(t-1)$ и таких же зависимостей P_1 от переменной $l(t)/m(t-1)$. Рассматривались кусочно-линейный вид функций $P_2(m(t-1)/n(t-1))$, $P_1(l(t)/m(t-1))$, квадратичный вид этих функций:

$$\begin{aligned} P_2\left(\frac{m(t-1)}{n(t-1)}\right) &= A(R_1, R_2, q, \rho) \left[\frac{m(t-1)}{n(t-1)}\right]^2 + \\ &+ (1 - A(R_1, R_2, q, \rho)) \left[\frac{m(t-1)}{n(t-1)}\right], \quad A(R_1, R_2, q, \rho) < 0, \\ P\left(\frac{l(t)}{m(t-1)}\right) &= B(R_1, R_2, q, \tau) \left[\frac{l(t)}{m(t-1)}\right]^2 + \\ &+ (1 - B(R_1, R_2, q, \tau)) \left[\frac{l(t)}{m(t-1)}\right], \quad B(R_1, R_2, q, \tau) < 0. \end{aligned}$$

Расчеты показали, что, если во многих частных случаях кусочно-линейной зависимости сходимость к пределам довольно медленная, то для всех случаев квадратичной зависимости сходимость оказывается быстрой.

Таким образом, рассмотренные в этом разделе модели соответствуют двум случаям выбора клиентов банка. В случае, когда каждый клиент банка принимает решение, ориентируясь только на параметры, характеризующие банк и неизменные на большом промежутке времени (банковские проценты ρ , τ , R_1 , R_2 и вероятность q), возникает некоторое стационарное распределение вероятностей числа клиентов, сделавших каждый возможный выбор, вообще говоря, не являющееся стадным поведением. Но в другом случае, когда каждый клиент банка выбирает решения исходя из соотношения клиентов, принявших то или иное решение в предшествующий момент времени, возникает стадное поведение.

2. МОДЕЛЬ, УЧИТЫВАЮЩАЯ РОСТ СРЕДСТВ У КЛИЕНТОВ БАНКА

Так же, как и в предыдущем разделе, будем рассматривать поведение клиентов в моменты $t = 1, 2, \dots$. Сохраняется в силе приведенное выше описание динамики количеств денег, имеющих у клиентов банка или положенных ими на долгосрочные депозиты.

Рассмотрим случай, когда имеется N клиентов банка и $x_i(t)$ денег, о которых каждый клиент решает, куда их вложить в момент времени t . Пусть $y_i(t)$ – количество денег клиента i , которые к моменту t уже вложены (в момент $t-1$) на период в два такта и не востребованы им на первом такте момента t (т.е. деньги клиента i , которые на момент принятия им решения в момент t находятся на долгосрочном депозите).

Обозначим через $z_i(t)$ количество денег, которые клиент i вкладывает на долгосрочный счет в момент t ; $u_i(t+1)$ – количество денег, которое клиент i возвращает в момент $t+1$, $0 \leq u_i(t+1) \leq z_i(t) \leq x_i(t)$.

Сделаем еще одно предположение. Клиент банка может вложить все имеющиеся у него деньги (но не часть их) на краткосрочный или на долгосрочный счет. Клиент может забрать только все деньги, вложенные в предыдущий момент на долгосрочный счет, или не забирать ничего, т.е. в момент $t + 1$ он может вернуть себе либо все вложенные в момент t деньги, либо ничего. Наконец случай, когда клиент воздерживается от вложения денег в банк (т.е. уходит из банка), исключается из рассмотрения. Тогда в соответствии со сделанными выше упрощающими предположениями описание процесса имеет вид

$$\begin{aligned} z_i(t) &= \begin{cases} x_i(t) \text{ с вероятностью } P_2(t), \\ 0 \text{ с вероятностью } 1 - P_2(t); \end{cases} \\ u_i(t+1) &= \begin{cases} z_i(t) \text{ с вероятностью } P_1(t+1), \\ 0 \text{ с вероятностью } 1 - P_1(t+1). \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть $X(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t)$ – суммарное количество наличных денег, имеющихся у всех клиентов в момент t ; $Y(t) = \sum_{i=1}^N y_i(t)$ – наличные деньги, уже вложенные клиентами в момент $t - 1$ на срок в два такта и не востребованные в момент t ; $Z(t) = \sum_{i=1}^N z_i(t)$ – деньги, вложенные в момент t в долгосрочные активы всеми клиентами; $U(t) = \sum_{i=1}^N u_i(t)$ – деньги, вложенные всеми клиентами в момент $t - 1$ на срок в два такта, но забранные ими из банка в момент t . Опишем динамику модели:

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= [x_i(t) - z_i(t)](1 + \rho) + u_i(t+1)(1 + \tau) + y_i(t)(1 + R)^2, \\ y_i(t+1) &= z_i(t) - u_i(t+1). \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} u_i(t+1) &= [x_i(t)(1 + \rho) + y_i(t)(1 + R)^2 - y_i(t+1)(1 + \rho) - x_i(t+1)]/(\rho - \tau), \\ z_i(t) &= [x_i(t)(1 + \rho) + y_i(t)(1 + R)^2 - y_i(t+1)(1 + \tau) - x_i(t+1)]/(\rho - \tau). \end{aligned} \quad (8)$$

Используя (7)–(8), получаем:

$$\begin{aligned} Z(t) &= [X(t)(1 + \rho) + Y(t)(1 + R)^2 - Y(t-1)(1 + \tau) - X(t-1)]/(\rho - \tau), \\ U(t+1) &= [X(t-1)(1 + \rho) + Y(t-1)(1 + R)^2 - Y(t)(1 + \rho) - X(t)]/(\rho - \tau). \end{aligned} \quad (9)$$

Сначала рассмотрим случай, когда $1 > P_2 > 0$, $1 > P_i > 0$, $P_2 = P_2(R_1, R_2, q, \rho)$, $P_1 = P_1(R_1, R_2, q, \tau)$.

Будем называть точку в $2N$ -мерном пространстве $x_1(t), y_1(t), \dots, x_N(t), y_N(t)$ состоянием системы $\zeta(t)$ в момент t . Можно описать траектории системы (последовательность точек $\zeta(t)$, $t = t_0, \dots, t_0 + k, \dots$), соответствующие трем типам стадного (одинакового) поведения.

1) $x(t+1) = y_i(t)(1 + R)^2$, $y_i(t+1) = x_i(t)$, $i = 1, \dots, N$; $t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ – все клиенты вкладывают в момент t на два такта;

2) $x_i(t+1) = x_i(t)(1 + \tau) + y_i(t)(1 + R)^2$, $y_i(t+1) = 0$, $i = 1, \dots, N$; $t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ – все клиенты вкладывают в момент t на один такт и на следующем такте забирают свои деньги;

3) $x_i(t+1) = x_i(t)(1 + \rho) + y_i(t)(1 + R)^2$, $y_i(t+1) = 0$, $i = 1, \dots, N$; $t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ – все клиенты вкладывают в момент t на один такт.

Заметим, что в этой модели, если один из типов стадного (одинакового) поведения имеет место в момент t , то в момент $t + 1$ может реализоваться любой другой тип поведения клиентов.

Обозначим через $r_i(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N)$ вероятность, что в момент времени t $x_i = x_i(t)$, $y_i = y_i(t)$, $i = 1, \dots, N$.

Из того, что $1 > P_2 > 0$, $1 > P_1 > 0$ и $\frac{dP_1}{dt} = \frac{dP_2}{dt} = 0$, следует, что *любое распределение, соответствующее одному из типов стадного (одинакового) поведения в момент t , не является стационарным для данной динамической модели.*

Теперь рассмотрим случай, когда поведение клиентов в момент t зависит от их выбора в предыдущий момент времени, более точно, от суммарных объемов средств, направленных в каждый возможный тип вложений в банк, включая досрочный отзыв вложения. Предположим, что

$$\begin{aligned} P_2(t) &= P_2(R_1, R_2, q, \rho, Z(t-1)/X(t-1)), \quad P_1(t) = P_1(R_1, R_2, q, \tau, U(t)/Z(t-1)), \\ P_2(R_1, R_2, q, \rho, 0) &= 0, \quad P_2(R_1, R_2, q, \rho, 1) = 1, \\ P_1(R_1, R_2, q, \tau, 0) &= 0, \quad P_1(R_1, R_2, q, \tau, 1) = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Это означает, что в отличие от рассмотренной выше модели здесь вероятности выбора определяются не долей числа клиентов, сделавших такой выбор в предыдущий момент, а количествами средств, направленных клиентами на долгосрочные и краткосрочные вложения в предыдущий момент, а также средствами, изъятыми ими из долгосрочных депозитов в данный момент времени. Так же, как и в предыдущем разделе, предположим, что $P_2(R_1, R_2, q, \rho, \alpha)$, $P_1(R_1, R_2, q, \tau, \alpha)$ – непрерывные функции α для $0 \leq \alpha \leq 1$, $\frac{dP_2(R_1, R_2, q, \rho, \alpha)}{d\alpha} > 0$ и $\frac{dP_1(R_1, R_2, q, \tau, \alpha)}{d\alpha} > 0$; $0 < P_2(R_1, R_2, q, \rho, \alpha) < 1$, если $0 < \alpha < 1$; $0 < P_1(R_1, R_2, q, \tau, \alpha) < 1$, если $0 < \alpha < 1$.

Условимся также, что $P_1(R_1, R_2, q, \tau, U(t)/Z(t-1)) = 1$ при $Z(t-1) = 0$ и $P_2(R_1, R_2, q, \rho, Z(t-1)/X(t-1)) = 1$ при $X(t-1) = 0$.

Точку $\zeta_0(t)$ в $2N + 2$ -мерном пространстве $x_1(t), y_1(t), \dots, x_N(t), y_N(t), X(t-1), Y(t-1)$ будем называть состоянием рассматриваемой системы.

Обозначим

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t), \quad y_1 = y_1(t); \dots; \quad x_N = x_N(t), \quad y_N = y_N(t); \\ v_1 &= x_1(t-1), \quad w_1 = y_1(t); \dots; \quad v_N = x_N(t-1), \quad w_N = y_N(t); \end{aligned} \quad (11)$$

$$V = \sum_{i=1}^N v_i, \quad W = \sum_{i=1}^N w_i, \quad X = \sum_{i=1}^N x_i, \quad Y = \sum_{i=1}^N y_i, \quad 0 \leq x_i, 0 \leq y_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

В этом случае (когда P_1, P_2 не постоянны во времени) траектории, отвечающие стадному поведению, реализующемуся во все моменты времени после момента t_0 , отличаются от таких же траекторий в предыдущем случае.

Можно описать траектории системы (последовательность точек $\zeta(t)$, $t = t_0 + 1, \dots, t_0 + k, \dots$), соответствующие трем типам стадного поведения:

1) $x(t+1) = y_i(t)(1+R)^2$, $y_i(t+1) = x_i(t)$, $i = 1, \dots, N$; $t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ – клиенты вкладывают после момента t на два такта;

2) $x_i(t+1) = x_i(t)(1+\tau) + y_i(t)(1+R)^2$, $y_i(t+1) = 0$, $i = 1, \dots, N$; $t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ – все клиенты вкладывают после момента t на один такт и на следующем такте забирают свои деньги;

3) $x_i(t+1) = x_i(t)(1+\rho) + y_i(t)(1+R)^2$, $y_i(t+1) = 0$, $i = 1, \dots, N$; $t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ – все клиенты вкладывают после момента t на один такт.

Обозначим через $r_i(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N, H, G)$ вероятность того, что

$$x_1 = x_i(t), \quad y_1 = y_i(t), \dots, x_N = x_N(t), \quad y_N = y_N(t),$$

$$H = \sum_{i=1}^N x_i(t-1), \quad G = \sum_{i=1}^N y_i(t-1).$$

Используя формулы (9), можно заключить, что трем видам стадного поведения отвечают следующие три распределения $r_t(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N, H, G)$:

$$1) r_t \left(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N, \sum_{i=1}^N y_i, \sum_{i=1}^N x_i / (1+R)^2 \right). \quad (12)$$

Обозначим через $r_t^{(1)}$ вероятность иметь в момент t (и, следовательно, в последующие моменты) стадное поведение первого типа;

$$2) r_t \left(x_1, 0, \dots, x_N, 0, H, \left(\sum_{i=1}^N x_i - H(1+\tau) \right) / (1+R)^2 \right). \quad (13)$$

Обозначим через $r_t^{(2)}$ вероятность иметь в момент t (и, следовательно, в последующие моменты) стадное поведение второго типа;

$$3) r_t \left(x_1, 0, \dots, x_N, 0, H, \left(\sum_{i=1}^N x_i - H(1+\rho) \right) / (1+R)^2 \right). \quad (14)$$

Обозначим через $r_t^{(3)}$ вероятность иметь в момент t (и, следовательно, в последующие моменты) стадное поведение третьего типа.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Существуют следующие пределы:*

$$\lim r_t^{(1)} = r^{(1)}, \quad \lim r_t^{(2)} = r^{(2)}, \quad \lim r_t^{(3)} = r^{(3)}, \quad r^{(1)} + r^{(2)} + r^{(3)} = 1.$$

Доказательство утверждения 2 см. в Приложении.

Важную роль играет вопрос о скорости сходимости. Но, к сожалению, скорость сходимости не удалось оценить аналитически. Многочисленные имитационные эксперименты с нашей моделью были выполнены для двух видов зависимостей: P_2 от переменной $Z(t-1)/X(t-1)$, P_1 от переменной $U(t)/Z(t-1)$. Рассматривались кусочно-линейный вид функций $P_2(Z(t-1)/X(t-1))$, и $P_1(U(t)/Z(t-1))$ квадратичный вид этих функций:

$$\begin{aligned} P_2 \left(\frac{Z(t-1)}{X(t-1)} \right) &= A(R_1, R_2, q, \rho) \left[\frac{Z(t-1)}{X(t-1)} \right]^2 + \\ &+ (1 - A(R_1, R_2, q, \rho)) \left[\frac{Z(t-1)}{X(t-1)} \right], \quad A(R_1, R_2, q, \rho) < 0, \\ P_1 \left(\frac{U(t)}{Z(t-1)} \right) &= B(R_1, R_2, q, \tau) \left[\frac{U(t)}{Z(t-1)} \right]^2 + \\ &+ (1 - B(R_1, R_2, q, \tau)) \left[\frac{U(t)}{Z(t-1)} \right], \quad B(R_1, R_2, q, \tau) < 0. \end{aligned}$$

Имитационные эксперименты показали, что во многих частных случаях кусочно-линейной зависимости сходимость к пределам была довольно медленная, а для всех случаев квадратичной зависимости сходимость оказывалась быстрой.

Таким образом, две исследованные в этом разделе модели представляют два случая выбора клиентов банка. В случае когда каждый клиент банка принимает решение, ориентируясь только на параметры, характеризующие банк и неизменные на рассматриваемом большом промежутке времени (банковские проценты ρ, τ , R_1, R_2 и вероятность q), стадного поведения не возникает

даже в течение длительного времени. Но в случае когда каждый клиент банка выбирает решения исходя из доли клиентов, принявших то или иное решение в предшествующий момент времени, с определенной вероятностью возникает один из трех типов стадного поведения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В разд. 1 и 2 для двух моделей поведения клиентов банка было показано, что при определенном виде зависимости поведения каждого клиента банка в данный момент времени от решений, принятых всеми клиентами банка в предшествующий момент, поведение клиентов с течением времени превращается в стадное. Таким образом, был исследован один из примеров стадного поведения. Вопрос о том, при каком решении клиентов банка, принятого в данный момент, и от их выбора, сделанного в предшествующие моменты времени, а также от параметров, определяемых банком (в основном банковскими процентами), поведение всех клиентов становится с течением времени стадным, представляется очень важным. Исследование и выделение признаков, разделяющих множество видов зависимостей на те, при которых возникает стадное поведение, и те, при которых такое поведение не возникает, оказываются делом достаточно сложным. Именно этот факт вынудил нас ограничиться лишь одним примером. Остается надеяться на возможность в дальнейшем получить полный ответ на этот вопрос.

В исследованных нами моделях показано, что возникают три типа стадного поведения клиентов банка, но не исследовалась реакция банка на возникновение стадного поведения. Если, как в модели Аллена–Гейла (Allen, Gale, 1998), учитывать величины X , L вложений банка в безопасные и рискованные активы, то в такой модели эти величины нужно рассматривать в динамике $X(t)$, $L(t)$ и учитывать их рост с темпами, соответствующими динамике внешней среды. В случае стадного поведения, когда начиная с некоторого момента все клиенты делают только долгосрочные вложения, для банка возникает ситуация процветания. В случае стадного поведения, когда начиная с некоторого момента все клиенты делают только краткосрочные вложения, для банка возникает ситуация, при которой для него становятся невозможными вложения в рискованные (и высокодоходные) активы, своего рода стагнация. В случае стадного поведения, когда начиная с некоторого момента все клиенты делают только долгосрочные вложения, которые забирают в следующий момент (нападение на банк), для банка возникает ситуация, при которой все более невозможным становится возврат клиентам требуемых средств, и в этом случае банк или переходит к стагнации, или терпит крах. Это лишь поверхностное описание динамики взаимодействия коллектива клиентов и банка. Для адекватного исследования этого взаимодействия необходимо исследование модели, включающей наряду с поведением коллектива клиентов банка также поведение банка и взаимодействие банка и коллектива клиентов.

Стоит отметить, что в случае, когда стадное поведение возможно, очень важным является исследование процесса перехода к стадному поведению и выхода из него. К сожалению, к настоящему времени нам мало известно о характере перехода к стадному поведению даже для простых моделей. Поэтому очень важный вопрос о причинах возникновения стадного поведения и условиях его прекращения не исследуется в данной работе. Вероятно, в настоящее время благодаря совершенствованию банковских механизмов и взаимодействию банков и государства проблема нападения на банк не является актуальной, тем более для экономически развитых стран. Но для нас исследованные выше модели имеют и другое значение. Дело в том, что это первые в какой-то мере изученные модели коллективного поведения, в которых участники принимают более одного решения и в которых возникает стадное поведение. В случае моделирования поведения участников фондовой биржи необходимо рассматривать участников, принимающих несколько решений (о покупке и о продаже акций). В случае фондовой биржи, в отличие от банка, основную роль играет взаимодействие между участниками. Во всяком случае, можно надеяться, что наше исследование может явиться шагом в построении модели поведения и взаимодействия участников фондового рынка.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. В случае зависимости $P_2(t) = P_2(R_1, R_2, q, \rho, m(t-1)/n(t-1))$ и $P_1(t) = P_1(R_1, R_2, q, \tau, l(t)/m(t-1))$, когда $P_2(R_1, R_2, q, \rho, 0) = 0$, $P_2(R_1, R_2, q, \rho, 1) = 1$, $P_1(R_1, R_2, q, \tau, 0) = 0$, $P_1(R_1, R_2, q, \tau, 1) = 1$, в формуле (4) имеем $P_1 = P_1(\lambda/\nu)$, $P_2 = P_2(\mu/\nu) = 1$, а учитывая, что $P_1(1) = 1$, $P_2(1) = 1$, $P_1(0) = 0$, $P_2(0) = 0$, из (4) получаем: $r_{t+1}(0, 0, 0) = r_{t+1}(N, N, 0) = 0$,

$$\begin{aligned} r_{t+1}(n, 0, 0) &= \sum_{\nu=N-n}^N \sum_{\mu=N-n}^{\nu} (1 - P_2(\mu/\nu))^n r_t(\nu, \mu, n + \mu - N) = \\ &= \sum_{\nu=N-n}^N r_t(\nu, N-n, 0) + \sum_{\nu=N-n}^N \sum_{\mu=N-n+1}^{\nu} (1 - P_2(\mu/\nu))^n r_t(\nu, \mu, n + \mu - N). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N r_t(n, 0, 0) &= \sum_{\nu=0}^N \sum_{n=\nu}^N r_t(\nu, N-n, 0) + \\ &+ \sum_{n=0}^N \sum_{\nu=N-n}^{\nu-N} \sum_{\mu=N-n}^{\nu-1} (1 - P_2(\mu/\nu))^n r_t(\nu, \mu, n + \mu - N) = \\ &= \sum_{n=0}^N r_t(n, 0, 0) = \sum_{\nu=0}^N \sum_{n=\nu}^{N-1} r_t(\nu, N-n, 0) + \\ &+ \sum_{n=0}^N \sum_{\nu=N-n}^N \sum_{\mu=N-n}^{\nu-1} (1 - P_2(\mu/\nu))^n r_t(\nu, \mu, n + \mu - N). \end{aligned}$$

Точно так же из (4) получаем

$$\begin{aligned} r_{t+1}(N, N, N) &= \sum_{\nu=N-n}^{N-1} \sum_{\mu=N-n}^N P_1^N(1) P_2^N(\mu/\nu) r_t(\nu, \mu, \mu) = \\ &= r_t(N, N, N) + \sum_{\mu=N-n}^N P_2^N(\mu/\nu) r_t(N, \mu, \mu) + \sum_{\nu=N-n}^{N-1} \sum_{\mu=N-n}^{\nu} P(\mu/\nu) r_t(\nu, \mu, \mu). \end{aligned}$$

И наконец

$$\begin{aligned} r_{t+1}(n, n, 0) &= \sum_{\nu=N-n}^N \sum_{\mu=N-n}^{\nu} (1 - P_1((n + \mu - N)/\mu))^n P_2^n(\mu/\nu) r_t(\nu, \mu, n + \mu - N) = \\ &= \sum_{\nu=N-n}^N P_2^n((N-n)/\nu) r_t(\nu, N-n, 0) + \\ &+ \sum_{\nu=N-n}^N \sum_{\mu=N-n+1}^{\nu} (1 - P_1((\mu + n - N)/\mu))^n P_2^n(\mu/\nu) r_t(\nu, \mu, \mu + n - N), \\ \sum_{n=0}^N r_{t+1}(n, n, 0) &= \sum_{n=0}^N r_t(N-n, N-n, 0) + \sum_{n=0}^N \sum_{\nu=N-n+1}^N P_2^n((N-n)/\nu) r_t(\nu, N-n, 0) + \\ &+ \sum_{n=0}^N \sum_{\nu=N-n}^N \sum_{\mu=N-n+1}^{\nu} (1 - P_1((\mu + n - N)/\mu))^n P_2^n(\mu/\nu) r_t(\nu, \mu, \mu + n - N). \end{aligned}$$

Поскольку из выражений (2)–(4) видно, что каждая из величин $r_{t+1}(N, N, N)$, $\sum_{n=0}^N r_t(n, 0, 0)$, $\sum_{n=0}^N r_t(n, n, 0)$ возрастает и ограничена единицей, то каждая из этих величин при t , стремящемся к бесконечности, сходится соответственно к величинам r_0 , r_1 , r_2 .

Пусть $\sum_{n=0}^N r_t(n, 0, 0) \rightarrow r_0$, $\sum_{n=0}^N r_t(n, n, 0) \rightarrow r_2$, $r_t(N, N, N) \rightarrow r_1$ при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что из сходимости величин $\sum_{n=0}^N r_t(n, 0, 0)$, $r_t(N, N, N)$, $\sum_{n=0}^N r_t(n, n, 0)$ следует, что положительные добавки к этим величинам в формулах (2)–(4) сходятся к нулю. Поскольку в этих добавках все слагаемые и все сомножители положительны, то при росте t к нулю сходятся все величины, кроме величин $r_t(N, N, N)$, $r_t(n, 0, 0)$, $r_t(n, n, 0)$, $n = 0, \dots, N$. Отсюда следует, что $\sum_{n=0}^N r_t(n, 0, 0) +$ при $r_t(N, N, N) + \sum_{n=0}^N r_t(n, n, 0) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. $r_0 + r_1 + r_2 = 1$. ■

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим траектории системы, соответствующие трем типам стадного поведения.

1. $x_i(t+1) = y_i(t)(1+R^2)$, $y_i(t+1) = x_i(t)$, $i = 1, \dots, N$; $t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ – все клиенты после момента t вкладывают деньги на два такта. В этом случае $Z(t) = X(t)$, $U(t) = 0$, и, следовательно, в момент $t+1$ из (6) получаем $P_2(t+1) = 1$, $P_1(t+1) = 0$. Поэтому во все последующие моменты с вероятностью единица мы будем иметь то же, что и в момент t .

2. $x_i(t+1) = x_i(t)(1+\tau) = y_i(t)(1+R^2)$, $y_i(t+1) = 0$, $i = 1, \dots, N$; $t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ – все клиенты вкладывают после момента t на один такт и на следующем такте забирают свои деньги. В этом случае $Z(t) = X(t)$, $U(t_0) = Z(t)$, и, следовательно, в момент $t+1$ из (6) получаем $P_2(t+1) = 1$, $P_1(t+1) = 1$. Поэтому во все последующие моменты с вероятностью единица мы будем иметь то же, что и в момент t .

3. $x_i(t+1) = x_i(t)(1+\rho) + y_i(t)(1+R^2)$, $y_i(t+1) = 0$, $i = 1, \dots, N$; $t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ – все клиенты вкладывают после момента t на один такт. В этом случае $Z(t) = 0$, и, следовательно, в момент $t+1$ из (6) получаем $P_2(t+1) = 0$. Поэтому во все последующие моменты с вероятностью единица будем иметь то же, что и в момент t .

Таким образом, траектории, соответствующие стадному поведению, являются стационарными. Если в один момент времени все клиенты банка делают одинаковый выбор, то с вероятностью единица они делают такой же выбор во все последующие моменты времени. Заметим, что

$$r_t^{(1)} = \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dy_1 \dots \int_0^\infty dx_N \int_0^\infty dy_N r_t \left(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N, H, \sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{(1+R)^2} \right),$$

$$r_t^{(2)} = \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N \int_0^\infty dH r_t \left(x_1, 0, \dots, x_N, 0, H, \left(\sum_{i=1}^N x_i - H(1+\rho) \right) / (1+R)^2 \right),$$

$$r_t^{(3)} = \int_0^\infty dx_1 \dots \int_0^\infty dx_N \int_0^\infty dH r_t \left(x_1, 0, \dots, x_N, 0, H, \left(\sum_{i=1}^N x_i - H(1+\tau) \right) / (1+R)^2 \right).$$

Как было показано выше, если в момент времени t точка траектории $\zeta(t)$ является точкой стадного поведения, то во все последующие моменты времени точки траектории соответствуют стадному поведению. Отсюда следует, что $r_{t+1}^{(i)} \geq r_t^{(1)}$ ($i = 1, 2, 3$), и кроме этого все величины $r_t^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) меньше или равны единице. Поэтому существуют пределы последовательностей $r_t^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) при $t \rightarrow \infty$.

Для каждого состояния нашей системы в момент t , для которого $0 < P_1(t) < 1$, $0 < P_2(t) < 1$, вероятность перейти в каждое состояние, соответствующее стадному поведению, больше нуля. Поэтому из того, что $r_t^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$; $t = 0, 1, \dots$) – возрастающие сходящиеся последовательности величин, следует, что все вероятности $r_t(x_1, y_1, \dots, x_N, y_N, H, G)$ состояний нашей системы, не соответствующие ни одному из видов стадного поведения, стремятся к нулю. Отсюда следует, что $r^{(1)} + r^{(2)} + r^{(3)} = 1$. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Вороновицкий М.М., Мейтал Ш.** (2003). Модель социального влияния на цены // *Экономика и мат. методы*. Т. 39. № 4.
- Вороновицкий М.М.** (2009). Модель стадного поведения при формировании спроса // *Экономика и мат. методы*. Т. 45. № 1.
- Allen F., Gale D.** (1998). Optimal Financial Crises // *J. of Finance*. Vol. 53.
- Allen F., Gale D.** (2000). Optimal Financial Crises // *Carnegie-Rochester Conference Serie on Public Policy*. Vol. 53.
- Allen F., Gale D.** (2000a). Bubbles and Crises // *The Econ. J.* Vol. 110. No. 460.
- Allen F., Gale D.** (2000b). Financial Contagion // *J. of Political Econ.* Vol. 108. No. 1.
- Banerjee A.V.** (1992). A Simple Model of Herd Behavior // *The Quarterly J. of Econ.* Vol. CVII. August.
- Bikhandany S., Hirsheifer D., Welch I.** (1992). A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Information Cascades' // *J. of Political Econ.* Vol. 100. No. 5.
- Diamond D.W., Dybvig P.H.** (1983). Bank Runs, Deposit Insurance and Liquidity // *J. of Political Econ.* Vol. 91. No. 3.
- Yorulmazer T.** (2003). Herd Behavior, Bank Runs and Information Disclosure. [Электронный ресурс] Social Science Research Network, Working Paper. Режим доступа: http://mp.ra.ub.uni-muenchen.de/9513/1/MPRA_paper_9513.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: апрель 2012 г.).

Поступила в редакцию
13.11.2011 г.

Model of Herd Behavior of Bank Clients

M.M. Voronovitsky

The run of bank is a phenomenon, when most of bank client demand the return their money from long-term deposits ahead of schedule. Herd behavior of bank clients is one of the reasons of that by our opinion. The run of bank is considered in this paper as an example of herd behavior. Two dynamic models of interaction of the clients and bank was created and investigated. It was shown that at simple and natural suppositions about decision making mechanisms by clients the herd behavior arises. The main purpose of this paper is the investigation of more complicated mechanisms of herd behavior than mechanisms investigated before.

Keywords: herd behavior, run of bank, mathematical models, Markov chain.